# Fiche méthode : Ensemble de définition d'une fonction

## I) Définition

L'ensemble de définition d'une fonction $f$, est l'ensemble des valeurs de $x$ pour lesquels $f(x)$ existe.

## II) Méthode et exemples

Jusqu'en classe de première, le calcul d'une image doit satisfaire aux deux règles suivantes :

- on ne divise pas par zéro
- on prend la racine carrée d'une quantité positive ou nulle.

### 1) Cas d'un quotient

La quantité écrite au dénominateur ne peut être nulle. On cherche donc la (les) valeur(s) de $x$ qui annule(nt) le dénominateur. Ce sont les valeurs interdites.

*Exemple 1 : Soit f la fonction définie par* $f(x)=\dfrac{7x+4}{x^2-3}$.

$f$ est définie si et seulement si $x^2-3\neq 0$.

On résout $x^2-3=0$ : $x^2-3=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$

(*remarque : on aurait pu aussi calculer le discriminant*)

Les valeurs interdites sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

L'ensemble de définition de $f$ est $D_f=\mathbb{R}/\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

### 2) Cas d'une racine carrée

La quantité écrite sous le radical ne peut pas être négative. On cherche donc les valeurs de $x$ qui rendent la quantité sous le radical négative.

*Exemple 2 : Soit g la fonction définie par* $g(x)=\sqrt{6-3x}$.

$g$ est définie si et seulement si $6-3x \geqslant 0$

On résout $6-3x \geqslant 0 \Leftrightarrow -3x \geqslant -6 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{-6}{-3} \Leftrightarrow x \leqslant 2$

L'ensemble de définition de $g$ est $D_g = ]-\infty ; 2]$.

### 3) Cas d'un quotient avec une racine carrée au dénominateur

La quantité écrite au dénominateur ne peut être nulle et la quantité écrite sous le radical ne peut pas être négative. On cherche donc les valeurs de $x$ qui rendent la quantité sous le radical négative ou nulle.

*Exemple 3 : Soit h la fonction définie par* $h(x)=\dfrac{x+7}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

$h$ est définie si et seulement si $x^2-4x+3 > 0$

On résout $x^2-4x+3 > 0$ : $\Delta = 4 > 0$ ; 2 racines 3 et 1.

$x^2-4x+3$ est du signe de $a$ sauf entre les racines.

| $x$ | $-\infty$ 1 3 $+\infty$ |
|---|---|
| $x^2-4x+3$ | + 0 – 0 + |

L'ensemble de définition de $h$ est $D_h = ]-\infty ; 1[ \cup ]3 ; +\infty[$.

## III) A vous de jouer

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble définition de la fonction proposée.

1) $f(x)=\dfrac{x+4}{2x-8}$ ; 2) $g(x)=\sqrt{-3x^2-7x-6}$ ; 3) $h(x)=\dfrac{2x^2-7x+9}{8}$ ;

4) $k(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{2x+1}}$ ; 5) $m(x)=(6x+3)(2x^2+5)$ ; 6) $p(x)=\sqrt{5x+15}$

7) $a(x)=\dfrac{x+3}{-2x^2+6x-9}$ ; 8) $b(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$ ; 9) $c(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{(2x+4)(3x-9)}$

## IV) Correction des exercices du III)

1) $f(x)=\dfrac{x+4}{2x-8}$

$f$ est définie si et seulement si $2x-8\neq 0$.

On résout $2x-8=0$ : $2x-8=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{2} \Leftrightarrow x=4$ .

La valeur interdite est 4.

L'ensemble de définition de $f$ est $D_f=\mathbb{R}/\{4\}$

2) $g(x)=\sqrt{-3x^2-7x-6}$

$g$ est définie si et seulement si $-3x^2-7x-6 \geqslant 0$

On résout $-3x^2-7x-6 \geqslant 0$ : $\Delta = -23 < 0$ .

$-3x^2-7x-6$ est toujours du signe de $a < 0$ . Il n'existe pas de valeur de $x$ pour laquelle $-3x^2-7x-6 \geqslant 0$ donc $g$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$

3) $h(x)=\dfrac{2x^2-7x+9}{8}$

8 est non nul donc $h$ est définie sur $\mathbb{R}$ $D_h=\mathbb{R}$

4) $k(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{2x+1}}$

$k$ est définie si et seulement si $2x+1 > 0$

On résout $2x+1 > 0$ : $2x+1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > 0{,}5$

L'ensemble de définition de $k$ est $D_k = ]0{,}5 ; +\infty[$.

5) $m(x)=(6x+3)(2x^2+5)$

$m$ est produit de polynôme donc $m$ est définie sur $\mathbb{R}$ $D_m=\mathbb{R}$

6) $p(x)=\sqrt{5x+15}$

$p$ est définie si et seulement si $15+5x \geqslant 0$

On résout $15+5x \geqslant 0 \Leftrightarrow 5x \geqslant -15 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{-15}{5} \Leftrightarrow x \geqslant -3$

L'ensemble de définition de $p$ est $D_p = [-3 ; +\infty[$.

7) $a(x)=\dfrac{x+3}{-2x^2+6x-9}$

$a$ est définie si et seulement si $-2x^2+6x-9\neq 0$

On résout $-2x^2+6x-9=0$ : $\Delta = -36 < 0$ ; pas de racines.

Il n'existe pas de valeur de $x$ pour laquelle $-2x^2+6x-9=0$ .

L'ensemble de définition de $a$ est $D_a=\mathbb{R}$

8) $b(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$

$b$ est définie si et seulement si $x^2+2x+1 \geqslant 0$

On résout $x^2+2x+1 \geqslant 0 : \Delta = 0$ .

$x^2+2x+1$ est toujours du signe de $a > 0$ . $b$ est définie sur $\mathbb{R}$

9) $c(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{(2x+4)(3x-9)}$

$c$ est définie si et seulement si $x+3 \geqslant 0$ et $(2x+4)(3x-9)\neq 0$ .

On résout $x+3 > 0$ et $(2x+4)(3x-9)=0$ .

* $x+3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -3$

* $(2x+4)(3x-9)=0 \Leftrightarrow 2x+4 = 0$ ou $3x-9 = 0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-4}{2}$ ou $x=\dfrac{9}{3} \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=3$

L'ensemble de définition de $c$ est [-3 ; -2[ ∪]-2 ; 3[ ∪]3 ; +∞[.