

DEVOIR EN CLASSE N°4

Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de la rédaction.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : (12 points)

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5 ; 8]$ par $f(x) = 20(x-1)e^{-0,5x}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0,5 ; 8]$

1) a) Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5 ; 8]$ $f'(x) = 10(-x+3)e^{-0,5x}$

b) Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0,5 ; 8]$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f .

2) Calculer $f(1)$ puis dresser le tableau de signe de f .

3) Justifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0,5 ; 8]$ par $F(x) = -40(x+1)e^{-0,5x}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,5 ; 8]$.

4) A l'aide de la propriété énoncé ci-dessous, calculer la valeur exacte de $\int_{1,5}^5 f(t) dt$.

Propriété : f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ et F est une primitive de f sur $[a ; b]$.

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Partie B : Application économique

Une entreprise produit sur commande des bicyclettes pour des municipalités. La production mensuelle peut varier de 50 à 800 bicyclettes. Le bénéfice mensuel réalisé par cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A de la façon suivante : si, un mois donné, on produit x centaines de bicyclettes, alors $f(x)$ modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise ce même mois.

Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle.

1) a) Vérifier que si l'entreprise produit 220 bicyclettes un mois donné, alors elle réalise ce mois-là un bénéfice de 7 989 euros.

b) Déterminer le bénéfice réalisé par une production de 408 bicyclettes un mois donné.
Arrondir à l'euro près.

2) *Pour cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la partie A et le modèle précédent.
Justifier chaque réponse.

a) Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire au minimum de bicyclettes pour ne pas travailler à perte ?

b) Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice maximum. Préciser alors ce bénéfice à l'euro près.

Exercice 2 : (6 points)

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) En utilisant la définition de $\int_a^b f(t) dt$ calculer :

a) $\int_0^4 x dx$

b) $\int_1^4 2t+1 dt$

2) a) Donner une primitive de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + \frac{3}{4}x^2 - x - 5$.

b) Donner les primitives de la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

c) Donner la primitive de la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = e^{2x}$ qui s'annule en 5.

DEVOIR EN CLASSE N°4 bis

Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de la rédaction.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : (12 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[4 ; 20]$ par $f(x) = (x - 4)e^{-0,25x+5}$.

Partie A : Étude d'une fonction

- 1) a) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[4 ; 20]$, $f'(x) = (-0,25x + 2)e^{-0,25x+5}$.
b) En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[4 ; 20]$.
- 2) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = -4xe^{-0,25x+5}$ est une primitive de f sur $[4 ; 20]$.
- 3) A l'aide de la propriété énoncée ci-dessous, calculer la valeur exacte de $\int_4^{20} f(t) dt$.

Propriété : f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ et F est une primitive de f

sur $[a ; b]$.
$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Partie B : Application économique

Une entreprise commercialise des centrales d'aspiration.

Le prix de revient d'une centrale est de 400 €.

On suppose que le nombre d'acheteurs d'une centrale est donné par $N(x) = e^{-0,25x+5}$, où x est le prix de vente d'une centrale exprimé en centaines d'euros.

- 1) Montrer que la fonction f de la partie A donne le bénéfice réalisé par l'entreprise, en centaines d'euros.
- 2) Calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise si la centrale est vendue 1 000 €. Arrondir à l'euro près.
- 3) À quel prix l'entreprise doit-elle vendre une centrale pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal à l'euro près ?

Exercice 2 : (8 points)

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- 1) En utilisant la définition de $\int_a^b f(t) dt$ calculer :

a) $\int_1^6 3x - 1 dx$

b) $\int_2^5 2t dt$

- 2) a) Donner une primitive de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (4x - 3)e^{2x^2 - 3x + 8}$

b) Donner les primitives de la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 4x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$.

c) Donner la primitive de la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ qui s'annule en 6.