Classe : T S

Devoir maison n°1 - A rendre le ____________

Donné le

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\frac{3n+1}{5n+2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier par deux méthodes différentes, le sens de variation de la suite (u_n) .

1) Exprimer $u_{n+1}-u_n$ en fonction de l'entier n et conclure.
2) a) Déterminer l'expression d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}+$ telle que pour tout entier naturel n on ait $u_n=f(n)$.

   b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}+$ puis déterminer l'expression de $f'(x)$.

   c) En déduire le sens de variation de f et conclure.

Exercice 2

La suite (u_n) est donnée par $u_0=1$ et pour tout entier n , $u_{n+1}=2u_n-3$.

On pose pour tout entier n , $v_n=u_n-3$.

1) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2) Exprimer v_n en fonction de n pour n entier.
3) En déduire u_n en fonction de n pour n entier.

Exercice 3

A la naissance d'Alban, sa grand-mère dépose sur un compte bancaire 100€ et décide d'augmenter ses versements de 2% à chaque anniversaire. On suppose qu'Alban ne fait aucun ajout, ni retrait sur son compte.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n la somme versée par la grand-mère d'Alban à son n-ième anniversaire.
- s_n La somme totale disponible sur le compte bancaire d'Alban à son n-ième anniversaire.

On a alors, $a_0=100$ et $s_n=a_0+a_1+..+a_n$.

1) Préciser la nature et le sens de variation de la suite (a_n) .
   En déduire l'expression de a_n en fonction de n .
2) Montrer que pour tout entier n , $s_n=5000\times(1{,}02^{n+1}-1)$.
3) Alban rêve d'acheter une guitare qui coûte 1 999 €. Pour savoir à partir de quel âge il pourra se l'offrir, on propose l'algorithme incomplet, ci-dessous.

```
Variables
    n est un entier
    a et S sont des réels
Début algorithme
    n prend la valeur 0
    a prend la valeur 100
    S prend la valeur 100
    Tant que ..........
      n prend la valeur n+1
      a prend la valeur a × ....
      S prend la valeur S+...
    Fin tant que
Afficher ....
Fin algorithme
```

a) Que représente les variables n , a et S ? Compléter les pointillés.

b) Modifier l'algorithme précédent afin de proposer un algorithme qui permette de résoudre le probléme avec seulement 2 variables n et S. (On utilisera le résultat de la question 2)).

c) *Question facultative :* Programmer l'un des algorithmes précédents, puis indiquer à partir de quel âge Alban pourra s'offrir la guitare. On précisera l'algorithme choisi et le langage utilisé (calculatrice Ti, casio, algobox, python ...)

Classe : T S

Correction Devoir maison n°1

Exercice 1

1) Pour n entier on a :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3n+3+1}{5n+5+2}-\frac{3n+1}{5n+2}=\frac{(3n+4)(5n+2)-(3n+1)(5n+7)}{(5n+7)(5n+2)}=\frac{1}{(5n+7)(5n+2)}$$

$n \in \mathbb{N}$ donc $5n+7>0$ et $5n+2>0$ d'où $u_{n+1}-u_n>0$ puis $u_{n+1}>u_n$ pour tout entier n

Conclusion : (u_n) **est croissante sur $\mathbb{N}$**

2) a) La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\dfrac{3x+1}{5x+2}$ répond à la question.

b) f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^+$ donc dérivable sur cet intervalle.

Pour $x \in \mathbb{R}^+$: $f'(x)=\dfrac{3(5x+2)-(3x+1)\times 5}{(5x+2)^2}=\dfrac{15x+6-15x-5}{(5x+2)^2}=\dfrac{1}{(5x+2)^2}$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, 1> et $(5x+2)^2>0$ donc $f'(x)>0$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Or, $u_n=f(n)$ pour tout entier n, on en déduit que (u_n) **est croissante sur $\mathbb{N}$**

Exercice 2

1) Pour tout entier n, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{u_{n+1}-3}{u_n-3}=\dfrac{2u_n-3-3}{u_n-3}=\dfrac{2(u_n-3)}{u_n-3}=2$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $v_0=u_0-3=-2$

2) Pour tout entier n, $v_n=v_0\times q^n=(-2)\times 2^n$.

3) Pour tout entier n, de $v_n=u_n-3$ on déduit que $u_n=v_n+3=-2\times 2^n+3=-2^{n+1}+3$

Exercice 3

1) Augmenter de 2% revient à multiplier par 1,02. Ainsi, pour tout entier n : $a_{n+1}=1{,}02\,a_n$.

(a_n) est une suite géométrique de raison $q=1{,}02$. Comme $q>1$, (a_n) est croissante sur $\mathbb{N}$

Pour tout entier n, $a_n=a_0\times q^n=100\times 1{,}02^n$.

2) Pour tout entier n, $a_n=\dfrac{a_0\times 1-q^{n+1}}{1-q}=\dfrac{100\times 1-1{,}02^{n+1}}{1-1{,}02}=\dfrac{-100}{0{,}02}\times(1-1{,}02^{n+1})=-5000\times(1-1{,}02^{n+1})$

$s_n=5000\times(1{,}02^{n+1}-1)$.

3) Alban rêve d'acheter une guitare qui coûte 1 999 €. Pour savoir à partir de quel âge il pourra se l'offrir, on propose l'algorithme incomplet, ci-dessous.

Variables
  n est un entier
  a et S sont des réels
Début algorithme
  n prend la valeur 0
  a prend la valeur 100
  S prend la valeur 100
  Tant que S < 1999
  n prend la valeur $n+1$
  a prend la valeur a $\times$ 1,02
  S prend la valeur $S+a$
  Fin tant que
Afficher n
Fin algorithme

a) La variable n représente l'age d'Alban. La variable S représente la somme total disponible sur le compte d'Alban. La variable a représente le montant versé par la grand-mère.

b)

Variables
n est un entier
S est un réel
Début algorithme
n prend la valeur 0
S prend la valeur 100
Tant que S < 1999
n prend la valeur $n+1$
S prend la valeur $5000\times(1{,}02^{n+1}-1)$
Fin tant que
Afficher n
Fin algorithme

c) En programmant l'algorithme, on obtient $n=16$. A 16 ans, Alban pourra s'acheter sa guitare.

TI	Casio	Algobox
Program ALBAN : 0 → N : 100 → S : While S < 1999 : N+1 → N : 5000*(1,02^(n+1)-1) → S : End : Disp N	==========ALBAN========= 0 → N 100 → S While S < 1999 N+1 → N 5000*(1,02^(n+1)-1) → S Whilend N	VARIABLES n EST_DU_TYPE NOMBRE S EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME n PREND_LA_VALEUR 0 S PREND_LA_VALEUR 100 TANT_QUE (S<1999) FAIRE DEBUT_TANT_QUE n PREND_LA_VALEUR n+1 S PREND_LA_VALEUR 5000*(pow(1.02,n+1)-1) FIN_TANT_QUE AFFICHER n FIN_ALGORITHME